Podstawy automatyki; AiR

Zestaw 1 - Transformacja Laplace'a

Zadanie 1 Zweryfikować następujace własności transformacji Laplace'a

a) $\frac{d}{dt}f(t)\hat{=}sF(s)-f(0-)$,

b) $\int_0^t f(\tau)d\tau\hat{=}\frac{1}{s}F(s)$,

c) $tf(t)\hat{=}-\frac{d}{ds}F(s)$,

d) $e^{at}f(t)\hat{=}F(s-a)$,

e) $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\hat{=}F(s)G(s)$,

f) $f(t-T)\hat{=}e^{-sT}F(s)$, gdzie $T\geq 0$

Na podstawie definicji wyznaczyć transformatę impulsu Diraca, a następnie - korzystając z tych własności - wyznaczyć transformaty następujących funkcji: 1, t, t^n, e^{-at}, te^{at}, t^2e^{at}, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $e^{-at}\sin\omega t$, $\sin(\omega t+\varphi)$, $t\sin\omega t$, a także $\delta(t-T)$ i $1(t-T)$, gdzie $T\geq 0$.

Zadanie 2 Metodą rozkładu na ułamki proste wyznaczyć oryginały następujących transformat:

a) $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$, b) $\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$

c) $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$, d) $\frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)}$.

Zadanie 3 Sprawdzić, że

a) $\frac{b-a}{(s-a)(s-b)}\hat{=}e^{-at}+e^{-bt}$,

b) $\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}\hat{=}1-\cos\omega t$.

Zadanie 4 Zakładając, że a) $\Delta>0$, b) $\Delta=0$, c) $\Delta<0$, gdzie $\Delta=4p^2-4q$, wyznaczyć i naszkicować oryginał transformaty

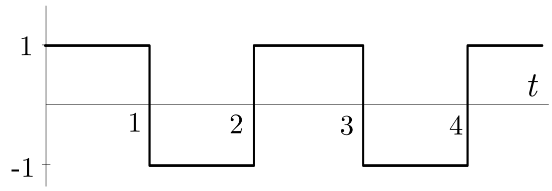
$$\frac{1}{s^2+2ps+q}.$$

Zadanie 5 Wykazać, że jeśli $x(t)$ jest funkcją okresową o okresie T, to

$$X(s)=\frac{X_T(s)}{1-e^{-sT}},$$

gdzie $X_T(s)=\int_0^T x(t)e^{-st}dt$. Sprawdzić następnie, że transformata fali prostokątnej pokazanej na rys 1 jest równa

$$\frac{(1-e^{-s})^2}{2(1-e^{-2s})}.$$



Rys. 1. Fala prostokątna

Zadanie 6 Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $y''+3y'+y=0$,

b) $y''+3y'+y=1$,

c) $y''+3y'+y=t$,

d) $y''+3y'+y=\sin\omega t$,

e) $y''+y'-2y=0$,

f) $y''+y'-2y=1$.

Zadanie 7 Wyznaczyć $e^{\mathbf{A}t}$, jeśli

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}.$$

Zadanie 8 Równanie różniczkowe ma postać:

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0.$$

Sprawdzić, że jeśli $\boldsymbol{\xi}^T(t)=[y(t),y'(t)]$, to

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t),$$

gdzie

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},$$

a następnie wyznaczyć $\boldsymbol{\xi}(t)$ oraz $y(t)$.