Podstawy automatyki; AiR

Zestaw 5 - Transformacja $\mathcal{Z}$

Zadanie 1 Zweryfikować następujace własności transformacji $\mathcal{Z}$:

a) $x_{n+1} \hat{=} zX(z) - zx_0$,

b) $\sum_{i=0}^{n} x_i \hat{=} \frac{z}{z-1} X(z)$,

c) $nx_n \hat{=} -z \frac{d}{dz} X(z)$,

d) $\lambda^n x_n \hat{=} X(\lambda z)$,

e) $\sum_{i=0}^{n} x_{n-i} y_i \hat{=} X(z)Y(z)$,

f) $x_{n-1} \hat{=} z^{-1} X(z) + x_{n-1}$.

Na podstawie definicji wyznaczyć transformatę dyskretnego impulsu Diraca δ_n, a następnie - korzystając z tych własności - transformaty następujących funkcji: 1, n, n^2, λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, $\sin(\omega n)$, $\cos(\omega n)$, $\lambda^n \sin(\omega n)$, $n \sin(\omega n)$, $n^2 \sin(\omega n)$, oraz $n \sin(\omega n)$.

Zadanie 2 Metodą rozkładu na ułamki proste wyznaczyć oryginały następujących transformat:

a) $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$, b) $\frac{1}{(z+1)^2(z+2)}$

c) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, d) $\frac{z^2+3}{(z+1)(z+2)}$.

e) $\frac{1}{z-\lambda}$.

Zadanie 3 Rozwiązać równanie różnicowe

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = u_n + 3u_{n-2}$$

przy warunku początkowym $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$ i pobudzeniu $u_n = \delta_n$.

Zadanie 4 Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową systemu o transmitancji

a) $\frac{z}{3z+2}$,

b) $\frac{1}{3z+2}$,

c) $\frac{z}{(3z+1)(4z-3)}$.

Zadanie 5 Wykazać, że $\mathbf{A}^n = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą. Następnie podać i rozwiązać równanie fazowe systemu o transmitancji

$$\frac{z}{6z^2 + z - 1}.$$

Zadanie 6 Niech transmitancja

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

gdzie ma bieguny $z_1, \ldots, z_m$ i niech $\alpha = \max(|z_1|, \ldots, |z_m|)$. Niech k_n będzie jego odpowiedzią impulsową. Wykazać, że

a) $|k_n| \leq c\alpha^n$, pewne c, jeśli wszystkie bieguny są różne,

b) $|k_n| \leq d(\alpha + \varepsilon)^n$, pewne d, dowolne $\varepsilon > 0$.

Zadanie 7 Transmitancja

$$\frac{z}{M(z)},$$

gdzie $M(z)$ jest wielomianem stopnia 2, ma biegun $z_1 = \lambda(\cos\omega + j\sin\omega) = \lambda e^{j\omega}$. Wyznaczyć

a) drugi z biegunów,

b) odpowiedź impulsową i sporządzić jej szkic. Założyć przy tym, że α) $\omega = 0, \lambda > 0$, β) $\omega = 0, \lambda < 0$, γ) $\omega \neq 0, \lambda > 0$, δ) $\omega \neq 0, \lambda < 0$.